Gewone Differentiaalvergelijkingen

Tentamen d.d. dinsdag 21 januari 2014, 13.00u–16.00u. Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd: alleen "ja", "nee" of "42" volstaat niet en levert dus ook geen punten op. Het gebruik van rekenmachines, boeken of aantekeningen is niet toegestaan.

Het tentamen bestaat uit zes opgaven. De puntenverdeling staat vermeld op de achterzijde.

Opgave 1. Bereken de oplossing van het volgende beginwaardeprobleem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\sin(x)}{y\sin(y^2)}, \qquad y(0) = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi}.$$

Uitwerking. Dit is een vergelijking met gescheiden variabelen. Kruislings vermenigvuldigen en primitieveren geeft

$$\int y\sin(y^2)dy = \int x\sin(x)dx \quad \Longrightarrow \quad -\tfrac{1}{2}\cos(y^2) = -x\cos(x) + \sin(x) + C.$$

De beginvoorwaarde geeft $C = 0$, dus de oplossing in impliciete vorm is

$$\cos(y^2) = 2x\cos(x) - 2\sin(x).$$

Een expliciete oplossing is dan

$$y = \pm\sqrt{\arccos(2x\cos(x) - 2\sin(x))}.$$

Vanwege de beginvoorwaarde moeten we het plusteken voor de wortel kiezen. De oplossing is alleen gedefinieerd op het interval waarop

$$-1 \leq 2x\cos(x) - 2\sin(x) \leq 1.$$

Opgave 2. Beschouw de vergelijking:

$$e^x\sin y + y + (e^x\cos y + x + e^y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

(a) Toon aan dat de vergelijking exact is.

(b) Bereken de algemene oplossing in impliciete vorm.

Uitwerking.

(a) Definieer

$$a(x,y) = e^x\sin y + y \quad \text{en} \quad b(x,y) = e^x\cos y + x + e^y.$$

Er geldt

$$\frac{\partial a}{\partial y} = e^x\cos y + 1, \quad \frac{\partial b}{\partial x} = e^x\cos y + 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x},$$

waaruit volgt dat de vergelijking exact is.

(b) De impliciete kromme $f(x,y)=c$ is een oplossing van de vergelijking als

$$\frac{\partial f}{\partial x}=a(x,y) \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=b(x,y). \tag{1}$$

Primitiveren naar x geeft

$$f(x,y)=\int e^x \sin y + y dx = e^x \sin y + xy + g(y).$$

Differentiëren naar y geeft

$$\frac{\partial f}{\partial y}=e^x \cos y + x + g'(y).$$

Om aan de tweede gelijkheid in (1) te voldoen moet $g'(y)=e^y$ zijn. Als we $g(y)=e^y$ kiezen, dan wordt de impliciete oplossing

$$e^x \sin y + xy + e^y = c.$$

Opgave 3. Beschouw de 3×3 matrix

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}.$$

Bereken een fundamentaalmatrix voor het stelsel $\dfrac{d\mathbf{y}}{dt}=A\mathbf{y}$.

Uitwerking. Een fundamentaalmatrix wordt gegeven door e^{At}. Merk op dat $A=D+N$ waarin

$$D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix} \quad \text{en} \quad N=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Omdat $DN=ND$ geldt $e^{At}=e^{Dt}e^{Nt}$. Omdat D diagonaal is, geldt

$$e^{Dt}=\begin{bmatrix}e^t & 0 & 0\\ 0 & e^t & 0\\ 0 & 0 & e^{3t}\end{bmatrix}.$$

Omdat $N^k=0$ voor $k\geq 2$ volgt uit de machtreeks definitie dat

$$e^{Nt}=I+Nt=\begin{bmatrix}1 & 2t & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

De e-machten vermenigvuldigen geeft

$$e^{At}=\begin{bmatrix}e^t & 2te^t & 0\\ 0 & e^t & 0\\ 0 & 0 & e^{3t}\end{bmatrix}.$$

Opgave 4. Bereken de oplossing van het volgende beginwaardeprobleem:

$$u'' - 4u' + 5u = 5x^2 - 3x + 3, \qquad u(0) = 0, \qquad u'(0) = 0.$$

Uitwerking. Dit is een lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten. Begin met het oplossen van de homogene vergelijking

$$u'' - 4u' + 5u = 0.$$

Substitutie van $u(x) = e^{\lambda x}$ geeft de karakteristieke vergelijking

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\lambda - 2)^2 + 1 = 0.$$

De nulpunten zijn $\lambda = 2 \pm i$ dus de oplossing in complexe vorm wordt gegeven door

$$u(x) = c_1 e^{(2-i)x} + c_2 e^{(2+i)x}.$$

De oplossing in reële vorm luidt

$$u(x) = d_1 e^{2x} \cos(x) + d_2 e^{2x} \sin(x).$$

Als particuliere oplossing voor de inhomogene vergelijking proberen we

$$\begin{aligned} u(x) &= Ax^2 + Bx + C, \\ u'(x) &= 2Ax + B, \\ u''(x) &= 2A. \end{aligned}$$

Invullen in de homogene vergelijking geeft

$$5Ax^2 + (5B - 8A)x + 2A - 4B + 5C = 5x^2 - 3x + 3.$$

Links en rechts de machten van x bekijken geeft de volgende vergelijking voor de coëfficiënten:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -8 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

De oplossing is $A = B = C = 1$. De algemene oplossing voor de inhomogene vergelijking wordt dus

$$u(x) = d_1 e^{2x} \cos(x) + d_2 e^{2x} \sin(x) + x^2 + x + 1.$$

De beginvoorwaarde $u(0) = 0$ geeft $d_1 = -1$ en de beginvoorwaarde $u'(0) = 0$ geeft $d_2 = 1$. De oplossing van het beginwaardeprobleem is dus

$$u(x) = -e^{2x} \cos(x) + e^{2x} \sin(x) + x^2 + x + 1.$$

Opgave 5. Zij $C([0,1])$ de ruimte van alle continue functies op het interval $[0,1]$ voorzien van de norm

$$\|y\| = \sup_{x\in[0,1]} |y(x)|.$$

Beschouw de integraaloperator

$$T : C([0,1]) \to C([0,1]), \qquad (Ty)(x) = 1 + \int_0^x ty(t)dt.$$

(a) Bewijs dat T voldoet aan de Lipschitz voorwaarde

$$\|Ty - Tz\| \leq \tfrac{1}{2}\|y - z\|$$

voor alle $y, z \in C([0,1])$.

(b) Bewijs met behulp van onderdeel (a) dat het beginwaardeprobleem

$$\frac{dy}{dx} = xy, \quad y(0) = 1,$$

een unieke oplossing heeft in $C([0,1])$. Je mag hierbij zonder bewijs gebruiken dat de ruimte $C([0,1])$ met bovenstaande norm volledig is. (De Engelse vertaling van "volledig" is "complete".)

Uitwerking.

(a) Uit de driehoeksongelijkheid voor integralen volgt

$$|(Ty)(x) - (Tz)(x)| = \left| \int_0^x t(y(t) - z(t))dt \right| \leq \int_0^x t|y(t) - z(t)|dt.$$

Omdat voor alle $t \in [0,1]$ geldt dat

$$|y(t) - z(t)| \leq \|y - z\|$$

volgt dat

$$|(Ty)(x) - (Tz)(x)| \leq \|y - z\| \int_0^x tdt.$$

Verder geldt voor alle $x \in [0,1]$ dat

$$\int_0^x tdt = \tfrac{1}{2}x^2 \leq \tfrac{1}{2}.$$

Dus voor alle $x \in [0,1]$ geldt de ongelijkheid

$$|(Ty)(x) - (Tz)(x)| \leq \tfrac{1}{2}\|y - z\|.$$

Door het supremum te nemen over $[0,1]$ volgt de gevraagde ongelijkheid.

(b) De functie $y \in C([0,1])$ is een oplossing van het beginwaardeprobleem dan en slechts dan als geldt dat $Ty = y$. Uit onderdeel (a) volgt dat $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ een contractie is, want $\frac{1}{2} < 1$. Omdat de ruimte $C([0,1])$ volledig is met betrekking tot de gegeven norm, volgt uit de contractiestelling van Banach dat er een unieke functie $y \in C([0,1])$ bestaat zodat $Ty = y$.

Opgave 6. Bereken de Greense functie $\Gamma(x,\xi)$ voor het semi-homogene randwaardeprobleem

$$u'' + u = f(x), \qquad u'(0) = 0, \qquad u(\pi) = 0.$$

Uitwerking. In het algemeen wordt de Greense functie gegeven door de formule

$$\Gamma(x,\xi) = \frac{1}{W(\xi)p(\xi)} \begin{cases} u_1(\xi)u_2(x) & 0 \le \xi \le x \le \pi, \\ u_1(x)u_2(\xi) & 0 \le x \le \xi \le \pi, \end{cases}$$

waarbij u_1 en u_2 oplossingen van de homogene vergelijking zijn die aan respectievelijk de linker en de rechter randvoorwaarde voldoen.

De algemene oplossing van de homogene vergelijking is

$$u(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x).$$

De oplossing $u_1(x) = \cos(x)$ voldoet aan de randvoorwaarde $u'(0) = 0$ en de oplossing $u_2(x) = \sin(x)$ voldoet aan de randvoorwaarde $u(\pi) = 0$. De Wronskiaan van deze oplossingen is

$$W = u_1 u_2' - u_1' u_2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

De Greense functie wordt dus

$$\Gamma(x,\xi) = \begin{cases} \cos(\xi)\sin(x) & 0 \le \xi \le x \le \pi, \\ \cos(x)\sin(\xi) & 0 \le x \le \xi \le \pi. \end{cases}$$

Normering. Voor dit tentamen zijn in totaal 36 punten te behalen. Als p het aantal punten is, dan wordt het tentamencijfer berekend met de formule

$$C = 1 + \frac{p}{4}.$$

Voor de vraagstukken kunnen de volgende punten worden behaald:

	Opg. 1	Opg. 2	Opg. 3	Opg. 4	Opg. 5	Opg. 6
(a)	6	2	6	6	4	4
(b)		4			4	